SOLUCION Y GUIA DE CALIFICACION

I. Muestre que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ln\left(arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)$ en $x = 2$ es $m = \frac{-1}{\pi}$

Solución. $f'(x) = \frac{1}{arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} * \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} * \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{-1}{2arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{1-\frac{1}{x}}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)} \Rightarrow f'(2) = \frac{-1}{2arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}\left(2^{\frac{3}{2}}\right)} = \frac{-1}{4\frac{\pi}{4}} = \frac{-1}{\pi}$

- Deriva correctamente sin errores……………………………………………3 puntos
- Hace bien lo anterior, comprende que la pendiente de la recta tangente es la derivada evaluada en el valor dado de x pero no obtiene el resultado pedido…………………………………4 puntos
- Deriva correctamente, comprende que la pendiente de la recta tangente es la derivada evaluada en el valor dado de x y obtiene el resultado pedido…………………………………..5 puntos

II. Determine él o los puntos sobre la gráfica de la ecuación dada donde la recta tangente es horizontal

$$x^2 + xy + y^2 = 12$$

Solución

$2x + y + xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-2x-y}{x+2y}$ Si $y' = 0 \Rightarrow y = -2x$. Como $x^2 + xy + y^2 = 12 \Rightarrow 3x^2 = 12$ $\Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow (2,-4)\ y\ (-2,4)\ son\ los\ puntos$

- Deriva bien y obtiene correctamente a $y'\ o\ \frac{dy}{dx}$…………………………………………………………………… 2 puntos
- Hace lo anterior y comprende que los puntos pedidos se encuentran cuando $\frac{dy}{dx} = 0$ …………3 puntos
- Hace bien lo anterior y comprende que hay que usar la ecuación dada obteniendo de manera correcta los valores de x y los puntos de (x,y) que resuelven el ejercicio…………………………………………………5 puntos

III. Determine la razón de cambio siguiente. Interprete su resultado: La ley de la gravitación universal establece que la fuerza entre dos masas $m_1\ y\ m_2$ separadas por una distancia r es $F = K\frac{m_1 * m_2}{r^2}$ Newtons. Supongamos que entre dos cuerpos separados una distancia r la fuerza entre ellos es $F = \frac{3*10^{16}}{r^2}$, hallar la variación instantánea de F respecto a r cuando $r = 10^4\ Km$

Solución

$$\frac{dF}{dr} = -2(3 * 10^{16})r^{-3} = -\frac{6 * 10^{16}}{r^3} \Rightarrow \frac{dF}{dr}(10^4) = -6 * 10^4\ {}^{Newtons}/_{Km}$$

Interpretación: $en\ el\ instante\ en\ que\ r = 10^4\ Km\ la\ fuerza\ entre\ los\ cuerpos\ tiende\ a\ disminuir\ en\ 6 * 10^4 Newtons\ cuando\ r\ aumenta\ en\ un\ 1\ Km.$

- Identifica y halla correctamente la razón de cambio pedida………………………………………………………………..3 puntos
- Hace bien lo anterior y evalúa correctamente la razón de cambio en el valor dado……4 puntos
- Hace bien todo lo anterior e interpreta correctamente el resultado…………………………………5 Puntos

IV. El área de un círculo de radio r es $A = 4\pi r^2$¿Cuál es la razón de cambio instantáneo de A respecto a r cuando $r = 8\ cm$?

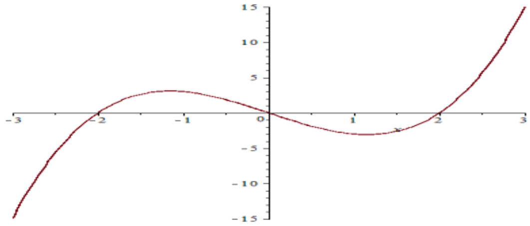
Soluciónx

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r \Rightarrow \frac{dA}{dr}(8) = 64\pi\ {}^{cm^2}/_{cm}$$

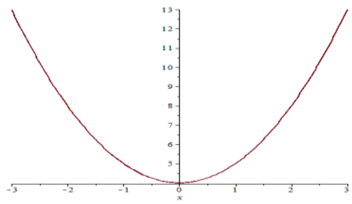
Interpretación: $en\ el\ instante\ en\ que\ r = 8\ cm, el\ área\ del\ circulo\ tiende\ a\ aumentar\ en\ 64\pi\ cm^2 cuando\ el\ radio\ r\ aumenta\ en\ 1\ cm$

- Identifica y halla correctamente la razón de cambio pedida………………………………………………………………..3 puntos
- Hace bien lo anterior y evalúa correctamente la razón de cambio en el valor dado……4 puntos
- Hace bien todo lo anterior e interpreta correctamente el resultado…………………………………5 Puntos

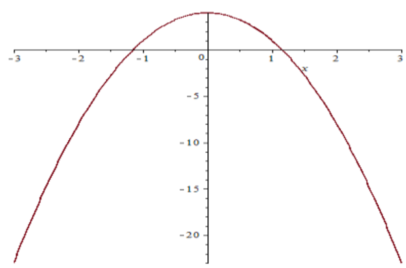
V. En este ejercicio se da la gráfica de $y = f(x)$. Escoger entre las opciones dadas la gráfica que más aproxime a la gráfica de $y = f'(x)$. De tres argumentos que justifiquen la escogencia de su respuesta.



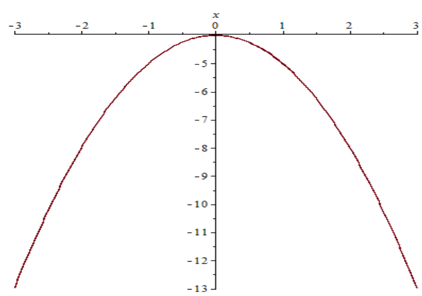
a)



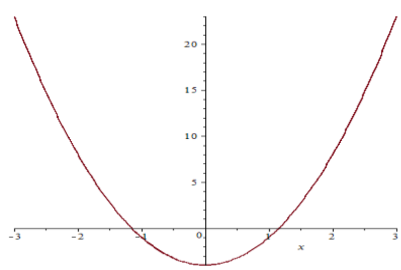
b)



c)



d) **Opción Correcta**



✓ En los puntos donde f tiene tangente horizontal la grafica de la derivada intersecta al eje

✓ En los intervalos donde f tiene rectas tangentes con pendiente negativa la grafica de la derivada está por debajo del eje x

✓ En los intervalos donde f tiene rectas tangentes con pendiente positiva la grafica de la derivada está por encima del eje x

✓ En los intervalos donde f tiene recta tangentes con pendientes que van aumentando de valor la grafica de la derivada es creciente.

- Elige opción correcta sin argumentar 2 puntos
- Elige opción correcta con un argumento 3 puntos
- Elige opción correcta con dos argumento 4 puntos

- Elige opción correcta con tres argumentos 5 puntos

1. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la grafica de $f(x) = arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ en $x = 0$

Solución.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} * \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{\left(\frac{(1-x)^2+(1+x)^2}{(1-x)^2}\right)*(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow f'(0) = 1$$

$$f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow y - \frac{\pi}{4} = 1(x-0) \Longrightarrow y = x + \frac{\pi}{4}$$

- Halla sin errores la derivada……………………………………………………………………………2 puntos
- Hace bien lo anterior. Interpreta y determina la pendiente de la recta tangente calculando la derivada en el punto dado……………………………………………………………………………………………………3 puntos
- Hace bien todo lo anterior . Obtiene correctamente el punto de tangencia y halla la ecuación de la recta tangente……………………………………………………………………………………………………5 puntos

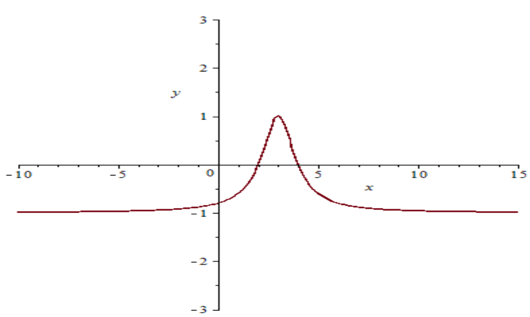
2. Si $e^{2x} + e^{2y} = 1$ muestre que $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2e^{2x}}{e^{4y}}$

Solución.

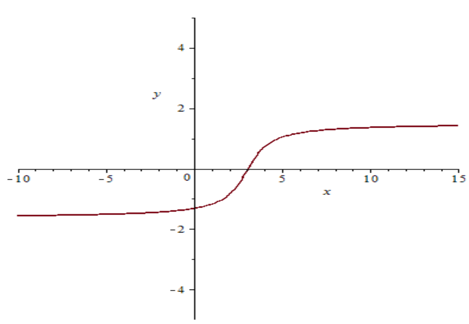
$$y' = -\frac{e^{2x}}{e^{2y}} \Longrightarrow y'' = -\frac{2e^{2x}e^{2y} - e^{2y}2y'e^{2x}}{e^{4y}} = -\frac{2e^{2x}e^{2y} + 2e^{2x}e^{2x}}{e^{4y}} = -\frac{2e^{2x}(e^{2y}+e^{2x})}{e^{4y}} = -\frac{2e^{2x}}{e^{4y}}$$

- Halla sin errores y'……………………………………………………………………………………2 puntos
- Hace bien lo anterior. Halla correctamente y'' y remplaza a y' en este desarrollo…………4 puntos
- Hace bien todo lo anterior. Manipula correctamente la expresión hasta obtener la expresión pedida ……5 puntos

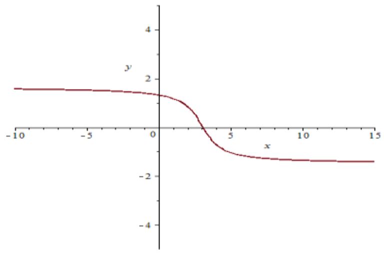
3. **3.** En este ejercicio se da la grafica de $y = f(x)$. Escoger entre las opciones dadas la gráfica que más aproxime a la gráfica de $y = f'(x)$. De tres argumentos que justifiquen la escogencia de su respuesta.



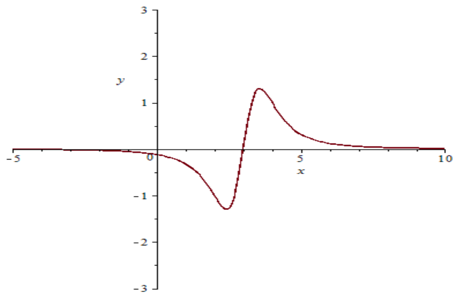
a)



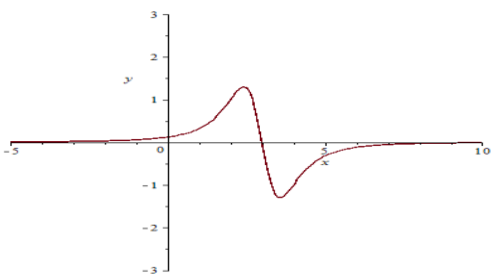
b)



c)



d) Opción correcta



- ✓ En el punto donde f tiene tangente horizontal la grafica de la derivada intersecta al eje x
- ✓ En el intervalo donde f tiene rectas tangentes con pendiente negativa la grafica de la derivada esta debajo del eje x
- ✓ En el intervalo donde f tiene rectas tangentes con pendiente positiva la grafica de la derivada esta arriba del eje x
- ✓ En el intervalo donde f tiene rectas tangente con pendiente que van aumentando de valor la grafica de la derivada es creciente.
- ✓ En el intervalo donde f tiene rectas tangentes con pendientes que van disminuyendo de valor la grafica de la derivada es decreciente
- ✓ Si la grafica de f tiende a horizontalizarse cuando x tiende a infinito entonces la grafica de la derivada tiene como asintota horizontal al eje x cuendo x tiende a infinito.
- ✓ El mismo argumento anterior cuando x tiende a menos infinito

- Elige opción correcta sin argumentar 2 puntos
- Elige opción correcta con un argumento 3 puntos
- Elige opción correcta con dos argumento 4 puntos
- Elige opción correcta con tres argumentos 5 puntos