División de polinomios, residuos y teorema del factor

Meta de comprensión: al final de esta sección, el estudiante comprende cómo utilizar los algoritmos de la división larga y división sintética para dividir polinomios. Adicionalmente, utiliza efectivamente el teorema del factor como herramienta para factorizar polinomios de grado mayor o igual que dos al dividirlos por factores lineales de la forma $x - a$.

Indicaciones:

a) Dados dos números enteros a y b, decimos que *a es divisible por b* si la división $a \div b$ tiene residuo cero.

b) Por la prueba de la división, dado que $D \div d$ tenga cociente (resultado) C y residuo r, se puede escribir: $D = (d * C) + r$, lo cual se puede reescribir como $\frac{D}{d} = C + \frac{r}{d}$. Esta ecuación es particularmente útil para escribir el resultado de la división en términos del cociente y del residuo. Adicionalmente, una vez resuelta la división, el residuo puede calcularse al *"despejar"* r de la ecuación: $D = (d * C) + r \iff r = D - (d * C)$.

c) Se puede utilizar el teorema del factor como herramienta para factorizar un polinomio de grado mayor o igual que dos:
Consideremos el polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Si $a \in \mathbb{R}$ es un valor con el cual $p(a) = 0$ (esto se dice "a es un cero o raíz de $p(x)$"), entonces, la división de polinomios $p(x) \div (x - a)$ es exacta (no tiene residuo), por lo cual existe un polinomio $q(x)$ con $grad(q) = grad(p) - 1$ el cual cumple: $p(x) \div (x - a) = q(x)$, lo que implica que $p(x) = (x - a)q(x)$.
Nota: pese a que el proceso puede repetirse de manera iterativa sobre el polinomio q, este proceso tiene como restricción la posibilidad que los ceros de q sean números imaginarios, lo cual trunca la división.

d) Adicionalmente, se puede hacer uso del teorema de los ceros racionales:
Consideremos el polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Si $p(x)$ tiene ceros/raíces racionales, entonces estos tienen la forma $a = \pm\frac{p}{q}$, donde p es un divisor de a_0 (término independiente) y q es un divisor de a_n (coeficiente líder), de modo que esto *provee* algún/algunos valores de a para los cuales la división de polinomios $p(x) \div (x - a)$ sea exacta y por consiguiente, se pueda aplicar el proceso descrito en el teorema del factor.

En los ejercicios 1 – 10, use el algoritmo de la división larga para determinar el cociente $q(x)$ y el residuo $r(x)$ cuando el polinomio $f(x)$ se divide entre el polinomio indicado $d(x)$. En cada caso, escriba la respuesta en la forma $f(x) = d(x)q(x) + r(x)$.

1. $f(x) = 8x^2 + 4x - 7;$ $\quad d(x) = x^2$
2. $f(x) = x^2 + 2x - 3;$ $\quad d(x) = x^2 + 1$
3. $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 4x + 1$ $\quad d(x) = x^2 + x - 1$
4. $f(x) = 14x^3 - 12x^2 + 6$ $\quad d(x) = x^2 - 1$
5. $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 5$ $\quad d(x) = (x + 2)^2$
6. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ $\quad d(x) = (2x + 1)^2$
7. $f(x) = 27x^3 + x - 2$ $\quad d(x) = 3x^2 - x$
8. $f(x) = x^4 + 8$ $\quad d(x) = x^3 + 2x - 1$
9. $f(x) = 6x^5 + 4x^4 + x^3$ $\quad d(x) = x^3 - 2$
10. $f(x) = 5x^6 - x^5 + 10x^4 + 3x^2 - 2x + 4$ $\quad d(x) = x^2 + x - 1$

En los ejercicios 11 – 16, calcule el residuo de las siguientes divisiones:

11. $p(x) = 2x^2 - 4x + 6$ entre $q(x) = x - 2$
12. $p(x) = 3x^2 + 7x - 1$ entre $q(x) = x + 3$
13. $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 2$ entre $q(x) = x - \frac{1}{2}$
14. $p(x) = 5x^3 + x^2 - 4x - 6$ entre $q(x) = x + 1$
15. $p(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 5$ entre $q(x) = x - 3$
16. $p(x) = 2x^4 - 7x^2 + x - 1$ entre $q(x) = x + \frac{3}{2}$

En los ejercicios 17 – 26, use la división sintética para calcular el cociente $q(x)$ y el residuo $r(x)$ cuando se divide $f(x)$ entre el polinomio lineal indicado.

17. $f(x) = 2x^2 - x + 5; \quad x - 2$
18. $f(x) = 4x^2 - 8x + 6; \quad x - \frac{1}{2}$
19. $f(x) = x^3 - x^2 + 2; \quad x + 3$
20. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 4; \quad x - 7$
21. $f(x) = x^4 + 16; \quad x - 2$
22. $f(x) = 4x^4 + 3x^3 - x^2 - 5x - 6; \quad x + 3$
23. $f(x) = x^5 + 56x^2 - 4; \quad x + 4$
24. $f(x) = 2x^6 + 3x^3 - 4x^2 - 1; \quad x + 1$
25. $f(x) = x^3 - \left(2 + \sqrt{3}\right)x^2 + 3\sqrt{3}x - 3; \quad x - \sqrt{3}$
26. $f(x) = x^8 - 3^8; \quad x - 3$

En los ejercicios 27 – 30, utilice la división de polinomios o la división sintética para determinar un valor de k que permita que $f(x)$ sea divisible por $d(x)$.

27. $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + kx - 4; \qquad d(x) = x^2 - 1$
28. $f(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 + kx^2 + 9x - 5; \qquad d(x) = x^2 - x + 1$
29. $f(x) = kx^4 + 2x^2 + 9k; \qquad d(x) = x - 1$
30. $f(x) = x^3 + kx^2 - 2kx + 4; \quad d(x) = x + 2$

31. Determine un valor de k tal que el residuo de la división de $f(x) = 3x^2 - 4kx + 1$ entre $d(x) = x + 3$ sea $r = -20$.
32. Cuando $f(x) = x^2 - 3x - 1$ se divide entre $x - c$, el residuo es $r = 3$. Determine c.